Лекция 11_Шварцшильд мәселесі жағдайында орбитаның векторлық элементтеріне қатысты тұрақтылығы

Аспан механикасының маңызды мәселелерінің бірі – қозғалыс тұрақтылығы мәселесі. Классикалық механикада біз тұрақтылықтың әртүрлі формаларымен таныспыз: асимптотикалық, лагранждық, ляпуновтық, орбиталық, пуассондық, Хилл, Якоби және т.б.

ЖСТ механикасында бұл мәселе орбитаның векторлық элементтеріне қатысты тұрақтылық мағынасында көптеген белгілі еңбектерде қарастырылған. Бұл лекцияда орбиталық тұрақтылық мәселесін және ЖСТ механикасындағы орнықтылықтың ерекше түрі – векторлық элементтерге қатысты тұрақтылық туралы мәселені қарастырамыз. Мысал ретінде Шварцшильд есебі терең талқыланады.

Біз бірінші жуықтау метрикасынан бастаймыз:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi_0{}^{ж}}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) \quad (1)$$

Мұндағы – $U = \frac{\gamma m_0}{r}$.

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{2}{3m_0 c^2}\varepsilon_0\right) + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{r}^{\,2}, \quad (2)$$

Ал, ε_0 – қарама-қарсы таңбамен алынған бөлшектердің өзара тартылу энергиясы. Содан шар метрикасы бойынша қозғалатын массасы m сынақ денесінің Гамильтонианы

$$H = mc^2 + \frac{P^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2}\left(\frac{P^4}{8m^3} + \frac{3P^2U}{2m} + \frac{2\varepsilon_0}{3m_0}mU - \frac{1}{2}mU^2\right), \quad (3)$$

Мұндағы $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}}$ - сынақ денесінің импульсы, L- Лагранж функциясы. Сынақ денесінің қозғалыс теңдеуі

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = \left(4E + 6mU + \frac{2m}{3m_0}\varepsilon_0\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U \cdot \vec{M}\right]}{mc^2}, \quad (4)$$

Мұндағы $\vec{M}, \vec{A}$ - орбитаның векторлық элементтері (импульс моменті және Лаплас векторы), Е – релятивистік емес энергия,

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{P}\right], \quad \vec{A} = \left[\frac{\vec{P}}{m}\vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}, \quad A = \gamma m m_0 e = \alpha e, \tag{5}$$

e - орбитаның эксцентриситеті. Алдымен сынақ денесінің эволюциялық қозғалысын ғана қарастырайық. Сонда (5) сызықты емес механиканың асимптотикалық әдісі – орташалау әдісін қолданып, эволюциялық қозғалыстың келесі теңдеулерін аламыз

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{6}$$

мұндағы

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4 \vec{M}}{M^3 M_0^3 c^2}. \tag{7}$$

Гамильтонианның орташа мәні

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0^2} - \frac{2m}{3m_0}\varepsilon_0\right)\frac{\alpha^2}{M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M c^2}, \tag{8}$$

Мұндағы жүйенің инварианты

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - \dfrac{A^2}{\alpha^2}}}. \tag{9}$$

(6) теңдеулерден қозғалыстың интегралдарын орындаңыз

$$M = \text{const}, \quad A = \text{const}. \tag{10}$$

Бұл Шварцшильд есебінде сынақ денесінің қозғалысының орбиталық тұрақтылығын білдіреді. Шынында да, сынақ денесінің қозғалысының орбиталық тұрақтылығы деп біз тербелмелі эллипстің уақыттың бастапқы моменті үшін анықталған бұзылмаған Кеплер эллипсінің пішіні мен өлшемдеріне жақын пішіні мен өлшемдерін уақыттың кез келген сәтінде сақтау қасиетін түсінеміз. Эллипстің пішіні мен өлшемдері e эксцентриситет мәндермен және $2a$ фокалды осінің ұзындығымен сипатталады. Егер формулаларды e және a мәндерін анықтайтын және оларда ғасырлық мүшелері болмаса, онда анықтамаға сәйкес эллипстік қозғалыс орбиталық тұрақтылыққа ие болады. (10) қатынастарынан

$$a = \mathrm{const}, \quad e = \mathrm{const}, \tag{11}$$

Көріп отырғанымыздай, сұйық шардың өрісіндегі сынақ денесінің қозғалысы орбиталық тұрақты болып табылады.

Енді жалпы қозғалысты зерттейік. Ол үшін қозғалыстың нақты теңдеулерін (4) сызықты емес механиканың басқа асимптотикалық әдісімен – пертурбация әдісімен біріктіреміз

$$\mathrm{M} = \mathrm{const}, \quad \mathrm{A} = \mathrm{A}_0 - \frac{4\gamma m_0}{c^2}\left(2\mathrm{E} + \frac{2m\varepsilon_0}{3m_0} + \frac{3\alpha}{\mathrm{P}}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{3\gamma\alpha m_0 e}{\mathrm{P}c^2}\sin^2\varphi, \tag{12}$$

P – орбитаның параметрі. Бұдан жалпы қозғалыс эволюциялық және периодтық қозғалыстардан тұратынын аңғаруға болады. (12)-ден көрініп тұрғандай, жалпы қозғалыс жағдайында да орбиталық тұрақтылық орын алады, өйткені эксцентриситет e те, $2a$ фокус осінде де секулярлық мүшелері болмайды.

Әрі қарай, Шварцшильд есебінде орбитаның векторлық элементтеріне қатысты тұрақтылық мәселесін қарастырамыз. Ол үшін Кеплер есебінде векторлық элементтер сақталғанын еске түсіреміз, яғни мынадай шартты қанағаттандыруы қажет

$$\vec{\mathrm{M}} = \mathrm{const}, \quad \vec{\mathrm{A}} = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Мұны Кеплер есебі жағдайында векторлық элементтерге қатысты барлық классикалық (эллиптикалық, параболалық және гиперболалық) орбиталардың тұрақтылығының бірегей шарты ретінде қарастыруға болады.

(6)-ден көрініп тұрғандай, Шварцшильд мәселесі жағдайында бұл шарт (13) орындалмайды, яғни орталық дененің өрісінде қозғалатын сынақ денесінің орбиталары, жалпы жағдайда, тұрақсыз - векторлық элементтерге қатысты тұрақсыздыққа айналады. Дегенмен, (13) шарты орындалатын орбиталардың белгілі бір аздаған класы бар, яғни векторлық орбиталық элементтерге қатысты тұрақты. Оларды анықтау үшін (6) қозғалыс теңдеулері (13) шартын қанағаттандыруын талап етеміз. Содан кейін біз шешімді аламыз

$$\vec{\mathrm{M}} = \mathrm{const}, \quad \vec{\mathrm{A}} = 0. \tag{14}$$

Бұл ЖСТ механикасындағы Шварцшильд есебі жағдайында векторлық элементтерге қатысты орнықты орбиталар класы бар дегенді білдіреді – бұл дөңгелек орбиталар класы.

Қолданылған әдебиет

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.564 с.
2. Фок В.А. Об основных принципах теории тяготения Эйнштейна // Современные проблемы гравитации. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1967. С. 5-11.
3. Абдильдин М. М. Проблема движения тел в общей теории относительности // – Алматы: Изд-во «Қазақ университеті», 2006. – 132 с.